ОКУТУУНУН ТЕХНОЛОГИЯСЫ

ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ

TEACHING TECHNOLOGY

Матанова Калыскан,
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент,
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары,
e-mail: kalys.matanova@manas.edu.kg

Дөлөшаева Айсалкын,
магистрант, математика мугалими,
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары,
e-mail: doloshaeva.1996@mail.ru

MAPLEде ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ БОРБОРДУК ИЙРИ СЫЗЫКТАРДЫ КАНОНИКАЛЫК ТҮРГӨ КЕЛТИРҮҮ

Матанова Калыскан,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Кыргызская Республика, город Бишкек,
e-mail: kalys.matanova@manas.edu.kg

Дөлөшаева Айсалкын,
магистрант, учитель математики,
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Кыргызская Республика, город Бишкек,
e-mail: doloshaeva.1996@mail.ru

ПРИВЕДЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ MAPLE

Matanova Kalyskan,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Kyrgyz-Turkish «Manas» University,
Kyrgyz Republic, Bishkek city,
e-mail: kalys.matanova@manas.edu.kg

Doloshayeva Aisalkyn,
Master's student, Mathematics Teacher,
Kyrgyz-Turkish University «Manas»,
Kyrgyz Republic, Bishkek city,
e-mail: doloshaeva.1996@mail.ru

REDUCING THE SECOND-ORDER CENTRAL LINES TO A CANONICAL FORM USING THE MAPLE PACKAGE

Аннотация: *Бул макалада экинчи тартиптеги борбордук ийри сызыктардын жалпы теңдемесин инварианттар методу жана жаңы координата системасына өтүү жолу менен канониканлык түргө келтирүүнү визуалдаштыруучу программа Maple компьютердик математика пакетинде түзүлдү. Программанын аткарылышы мисалдарда көрсөтүлдү.*

Аннотация: *В этой статье описана программа визуализации приведения общего уравнения центральных линий второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов и путем перехода к новой системе координат в пакете компьютерной математики Maple. Выполнение программы продемонстрировано на примерах.*

Annotation: *This work describes a visualization program for reducing the general equation of second-order central lines to a canonical form using the invariant method and by switching to a new coordinate system in the Maple computer mathematics package. The execution of the program is demonstrated by examples.*

Түйүндүү сөздөр: *экинчи тартиптеги борбордук ийри сызыктар, инвариант методу, өзгөртүп түзүү, каноникалык түр, Maple пакеттери.*

Ключевые слова: *центральные кривые второго порядка, метод инвариантов, преобразование, канонический вид, пакеты Maple.*

Key words: *second-order central lines, invariant method, transform, canonical form, Maple packages.*

Киришүү. Компьютерди жана башка маалыматтык-коммуникациялык технологияларды жалпы билим берүү мектебинде жана ЖОЖдо колдонуу окутуунун башкаруусун оптималдаштырууга, окутуучулардын жана студенттердин убактысын бир кыйла үнөмдөө менен бирге окуу процессинин натыйжалуулугун жана объективдүүлүгүн жогорулатууга, окуучуларды жаңы билимдерди алуу үчүн умтулууга жана иштелип чыккан билгичтиктерди жана көндүмдөрдү бекемдөөгө мүмкүндүк берет. «Кандай гана тармакта билим берүүнү уюштуруу жүргүзүлбөсүн замандын талабына ылайык окутууну компьютердик технологияларынан пайдаланып уюштуруу зор жыйынтык берери» талашсыз [1, с. 26]. Ар кандай маселелердин визуалдаштыруусу жана санариптик жабдуулары математиканын тиешелүү бөлүмдөрүн үйрөнүүдө көрсөтмөлүүлүктү жогорулатат, студенттерди жаңы билим алууга мотивациялайт.

Экинчи тартиптеги ийри сызыктардын теориясын [2, 169-б.; 3, 45-б.] өздөштүрүүдө табигый илимдер адистиктеринин студенттери гана эмес, математика багытында окуган студенттер да кыйынчылыктарга туш болушат. Экинчи тартиптеги ийри сызыктарды өздөштүрүп, каноникалык түргө келтирүүдө жана алардын графиктерин тургузууда Maple программасын колдонуу ыңгайлуу жана ишеништүү болот. Керектүү касиеттерди талап кылган компьютердик моделдерди түзүү үчүн көп параметрлүү программалык процедураларын иштеп чыгуу зарыл. Бүгүнкү колдонулган математикалык пакеттерде теңдемелери менен берилген ийри сызыктардын графиктерин ал пакеттердеги командалардын жардамы менен оңой эле тургузууга болот. Бирок ал пакеттерде берилген сызыктардын жалпы теңдемесинин каноникалык түрүн жана ал түргө келтирүүдөгү тик бурчтуу координата системасынын өзгөртүп түзүүлөрүн түздөн-түз алууга мүмкүн эмес. Мындай маселелер бир топ эмгектерде каралган [4]. Эмгегинде экинчи тартиптеги ийри сызыктардын жана беттердин каноникалык түргө келтирүүсүү ортогоналдуу өзгөртүү методу менен MathCAD чөйрөсүндө каралган [5, 85-б.; 6]. Эмгектеринде Maple системасында экинчи тартиптеги ийри сызыктардын теориясынын компьютердик моделдөөсү берилген.

Изилдөөнүн максаты. Бул макалада

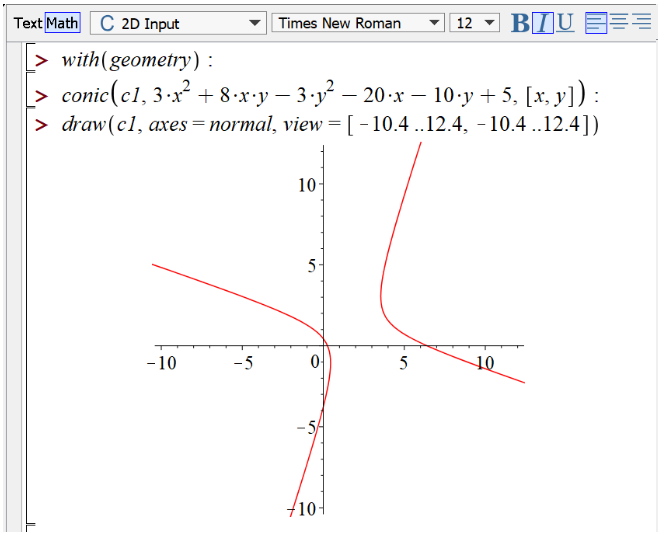
«Аналитикалык геометрия» «дисциплинасындагы «Экинчи тартиптеги ийри сызыктарды каноникалык түргө келтирүү» деген теманын Maple программасынын жардамы менен визуалдаштыруусу каралат.

Изилдөөнүн методу. Өзгөртүп түзүү жана инварианттар методдорун колдонуп экинчи тартиптеги борбордук ийри сызыктарды классификациялоочу, алардын графикалык иллюстрациясын, каноникалык теңдемелерин жана координата системасын өзгөртүп түзүү формулаларын чыгарган программа түзүлдү. Аны түзүүдө басым *geometry* пакетине жасалды.

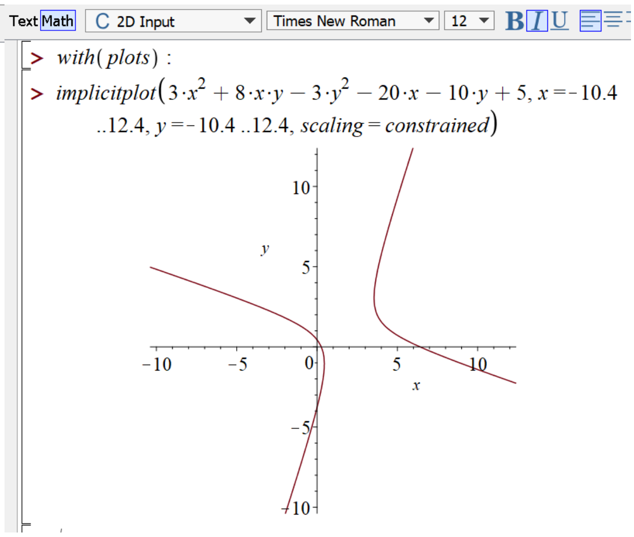
Негизги мазмуну. Maple программалык пакетинде геометриялык объекттер менен иштөө үчүн атайын *geometry* пакети каралган [7, 570-б.]. Ал евклиддик тегиздигиндеги бардык геометриялык объектилерин, б.а чекит, ийри сызык, үч бурчтук, айлана ж.б. тургузууга жана алар менен иштөөгө мүмкүндүк берет.

$$ax^2 + 2abxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

жалпы экинчи тартиптеги ийри сызыктарды изилдөө үчүн *conic*, *ellipse*, *hyperbol*, *parabol* командалары колдонулат. Ошондой эле, теңдемелери айкын эмес түрдө берилген ийри сызыктарды изилдөө үчүн *plots* пакетиндеги *implicit* командасы да колдонулат. Бул командалардын жардамы менен ийри сызыктардын параметрлерин жана графиктерин алууга болот, мисалы, $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 20x - 10y + 5 = 0$ жалпы теңдемеси менен берилген ийри сызыкка колдонулушу 1, 2-сүреттөрдө көрсөтүлдү.



1-сүрөт.



2-сүрөт.

Экинчи тартиптеги бардык ийри сызыктар 2 группага бөлүнөт: борбордук жана борбордук эмес. Борбордук ийри сызыктар жалгыз симметрия борборуна ээ. Борбордук эмес сызыктарда симметрия борбору жок же алар чексиз көп болот. Борбордук ийри сызыктарга эллипс, жалган эллипс, гипербола, эки чыныгы жана жалган кесилишкен түз сызык кирет. Бул түрдөгү ийри сызыктарды келтирүү үчүн эң жакшы инварианттар методу иштейт. Биз сунуштаган программада инварианттар методу жана жаңы тик бурчтуу координаталар системасына өтүү ыкмасы колдонулду. Төмөндө эллипстин теңдемесин каноникалык түргө келтирген программа сунушталат.

```
restart;
with(geometry);
with(plots, display);
```

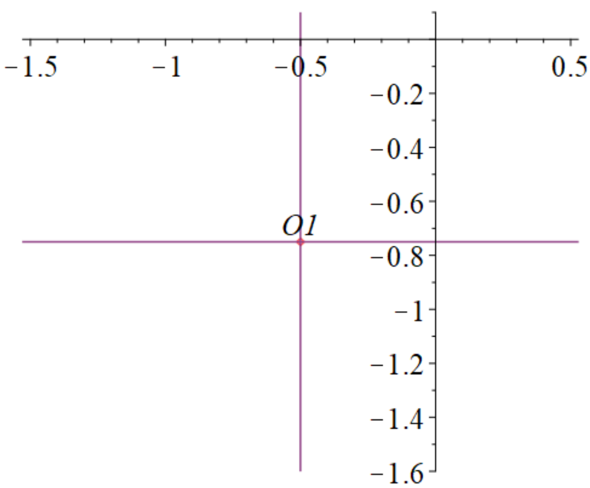
```
with(linalg, det);
_EnvHorizontalName := 'x';_EnvVerticalName := 'y';_EnvExplicit := true;
### Ийри сызыктын теңдемесин киргизгиле:
Eq := a*x^2 + 2*a*b*x*y+c*y^2 +2*d*x +2*e*y+f = 0;
Q := lhs(Eq);
a_11 := coeff(Q, x^2);
a_22 := coeff(Q, y^2);
dd := 1/2*coeff(Q, y);
a_12 := coeff(dd, x);
Q2 := a_11*x^2 + 2*a_12*x*y + a_22*y^2;
LQ := simplify(Q - Q2);
a_13 := 1/2*coeff(LQ, x);
a_23 := 1/2*coeff(LQ, y);
a_33 := simplify(-2*a_13*x - 2*a_23*y + LQ);S := a_11 + a_22;
delta := det(Matrix(2, 2, [[a_11, a_12], [a_12, a_22]]));
Delta := det(Matrix(3, 3, [[a_11, a_12, a_13], [a_12, a_22, a_23], [a_13, a_23, a_33]]));
sys := {A_11*C_11 = delta, A_11*C_11*F_11 = Delta, A_11 + C_11 = S};
sol := solve(sys);
assign(sol);
A_11;
if a_12 = 0 then
 alpha := 0;
else
 alpha := arctan((A_11 - a_11)/a_12);
end if;
deg := evalf[4](convert(alpha, degrees));
CFIM := A_11*xi^2 + C_11*eta^2 + F_11;
cf_1 := coeff(CFIM, xi^2);
cf_2 := coeff(CFIM, eta^2);
cf_3 := -cf_1*xi^2 - cf_2*eta^2 + CFIM;
CFIM := (CFIM - cf_3 = -cf_3)/(-cf_3);
eq_c := solve([a_11*x0 + a_12*y0 + a_13 = 0, a_12*x0 + a_22*y0 + a_23 = 0], [x0, y0]);
assign(eq_c); ellipse(e1, Eq);
point(O1, x0, y0); line(x1, x - x0); line(y1, y - y0);
point(F1,simplify(HorizontalCoord(foci_1_e1)), simplify(VerticalCoord(foci_1_e1)));
point(F2,simplify(HorizontalCoord(foci_2_e1)), simplify(VerticalCoord(foci_2_e1)));
line(x2, [F1, F2]);
PerpendicularLine(y2, O1, x2);
GR1 := draw([e1(color = white), x1(style = line, color = "Niagara DarkOrchid", thickness = 1),
y1(style = line, color = "Niagara DarkOrchid", thickness = 1), O1], printtext = true, axes = normal);
GR2 := draw([e1(color = white), x1(style = line, color = "Niagara DarkOrchid", thickness = 1),
y1(style = line, color = "Niagara DarkOrchid", thickness = 1), x2(style = line, color = blue,
thickness = 1), y2(style = line, color = blue, thickness = 1), O1], printtext = true, axes = normal);
GR3 := draw([e1, O1, F1, F2, x2(style = line, color = blue, thickness = 1), y2(style = line, color
= blue, thickness = 1)], printtext = true, axes = normal, title = "Эллипс");
Eq1 := Eq;
x := xi*cos(alpha) - eta*sin(alpha) + x0;
y := xi*sin(alpha) + eta*cos(alpha) + y0;
xxx := x; yyy := y;
```

```
eq1 := Eq1; unassign('x'); unassign('y'); Eq;
eq1 := expand(eq1); eq2 := lhs(eq1);
a_11 := coeff(eq2, xi^2);
a_22 := coeff(eq2, eta^2);
cc := -a_11*xi^2 - a_22*eta^2 + eq2;
eq3 := combine(simplify((eq2 - cc = -cc)/(-cc)));
AAA := array(1 .. 12, 1 .. 3, sparse);
AAA[1, 1] := `Жалпы теңдеме:`: AAA[1, 2] := `:`: AAA[1, 3] := Eq;
AAA[2, 1] := [x[0], y[0]]: AAA[2, 2] := `=`: AAA[2, 3] := [x0, y0];
AAA[3, 1] := `&alpha; буруу бурчу`: AAA[3, 2] := `=`;
AAA[3, 3] := [alpha, deg];
AAA[4, 1] := `Инварианттар: S, &delta;, &Delta; `;
AAA[4, 2] := `=`: AAA[4, 3] := [S, delta, Delta];
AAA[5, 1] := [`\`A`[1]*`, `*C[1]*` ,`*F[1]*`\` `]: AAA[5, 2] := `=`;
AAA[5, 3] := [A_11, C_11, F_11];
AAA[6, 1] := `Каноникалык теңдеме (ИМ)`: AAA[6, 2] := `:`;
AAA[6, 3] := CFIM: AAA[7, 1] := [`cos&alpha;, sin&alpha;`];
AAA[7, 2] := `=`; AAA[7, 3] := [cos(alpha), sin(alpha)];
AAA[8, 1] := x; AAA[8, 2] := `=`; AAA[8, 3] := xxx;
AAA[9, 1] := y; AAA[9, 2] := `=`; AAA[9, 3] := yyy;
AAA[10, 1] := `Каноникалык теңдеме (ЖКСӨ)`;
AAA[10, 2] := `:`; AAA[10, 3] := eq3; AAA[11, 1] := [F1, F2];
AAA[11, 2] := `=`; AAA[11, 3] := [coordinates(F1), coordinates(F2)];
AAA[12, 1] := [a, b]; AAA[12, 2] := `=`;
AAA[12, 3] := [1/2*MajorAxis(e1), 1/2*MinorAxis(e1)];
print(AAA);
display(GR1); display(GR2); display(GR3);
```

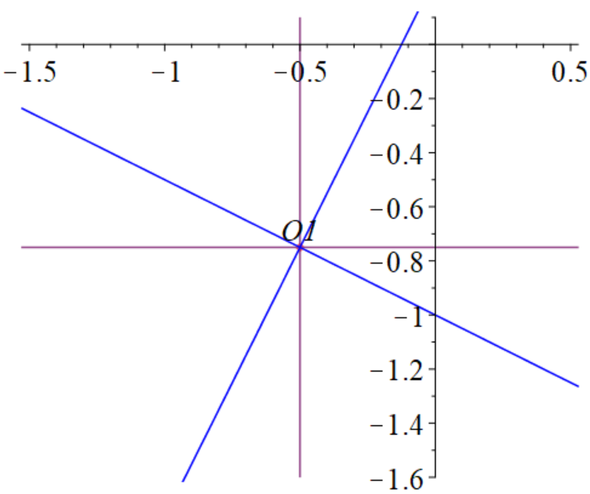
Программанын аткарылышын мисалда көрсөк, 3-сүрөттө симметрия борбору, буруу бурчу, инварианттардын маанилери, инварианттар методу (ИМ) менен алынган каноникалык теңдеме, жаңы координаталарга өтүү формулалары, ал формулалардын жардамы менен алынган каноникалык теңдеме (КСОӨ), эллипстин фокустары жана жарым октору, ал эми 4-сүрөттө алгач декарттык координаталар системасынын параллель которуусу, 5-сүрөттө анын бурчка буруусу, 6-сүрөттө эллипстин графиги фокустары менен бирге экранга чыгарат.

Жалпы теңдеме:	\`:\`	$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$
$[x_0, y_0]$	\`=\`	$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right]$
α буруу бурчу	\`=\`	$\left[-\arctan\left(\frac{1}{2}\right), -26.55\ degrees\right]$
Инварианттар: S, δ, Δ	\`=\`	$[13, 36, -81]$
$[\,\grave{}A_1, \ C_1, \ F_1\,\grave{}\,]$	\`=\`	$\left[4, 9, -\frac{9}{4}\right]$
Каноникалык теңдеме (ИМ)	\`:\`	$4\eta^2 + \frac{16\xi^2}{9} = 1$
$[\cos\alpha, \sin\alpha]$	\`=\`	$\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$
x	\`=\`	$\frac{2\xi\sqrt{5}}{5} + \frac{\eta\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{2}$
y	\`=\`	$-\frac{\xi\sqrt{5}}{5} + \frac{2\eta\sqrt{5}}{5} - \frac{3}{4}$
Каноникалык теңдеме (КСОӨ)	\`:\`	$4\eta^2 + \frac{16\xi^2}{9} = 1$
$[F1, F2]$	\`=\`	$\left[[0, -1], \left[-1, -\frac{1}{2}\right]\right]$
$[a, b]$	\`=\`	$\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$

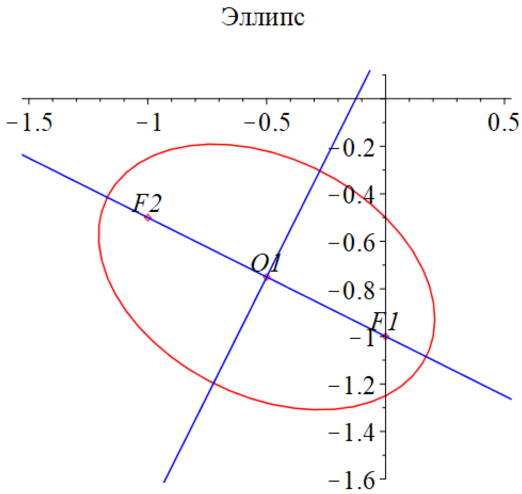
3-сүрөт



4-сүрөт.



5-сүрөт.

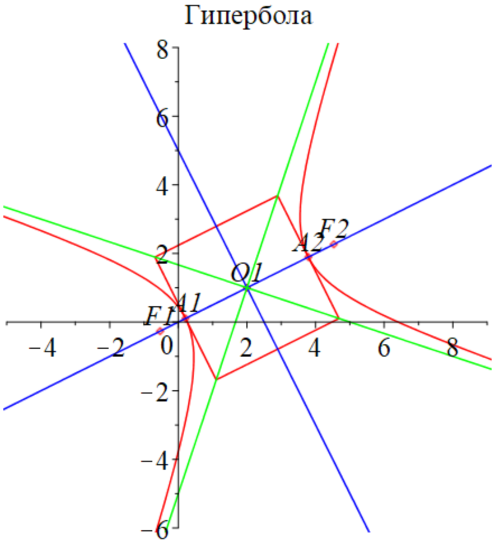


6-сүрөт.

Жогоруда каралган $3x^2+8xy-3y^2-20x-10y+5=0$ теңдемесин гиперболанын программасына киргизсек, ушундай эле натыйжаларды алабыз, бирок кошумча гиперболанын чокуларын жана асимптоталардын теңдемелерин (7-сүрөт), графигин, фокустарын, негизги тик бурчтугун жана асимптоталарын да көрсөк болот (8-сүрөт).

Жалпы теңдеме:	\`:\`	$3x^2+8xy-3y^2-20x-10y+5=0$
$[x_0, y_0]$	\`=\`	$[2, 1]$
α буруу бурчу	\`=\`	$\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right), 26.55\ degrees\right]$
Инварианттар: S, δ, Δ	\`=\`	$[0, -25, 500]$
$[A_1, C_1, F_1]$	\`=\`	$[5, -5, -20]$
Каноникалык теңдеме (ИМ)	\`:\`	$-\frac{\eta^2}{4}+\frac{\xi^2}{4}=1$
$[cos\alpha, sin\alpha]$	\`=\`	$\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$
x	\`=\`	$\frac{2\xi\sqrt{5}}{5}-\frac{\eta\sqrt{5}}{5}+2$
y	\`=\`	$\frac{\xi\sqrt{5}}{5}+\frac{2\eta\sqrt{5}}{5}+1$
Каноникалык теңдеме (КСОӨ)	\`:\`	$-\frac{\eta^2}{4}+\frac{\xi^2}{4}=1$
$[F1, F2]$	\`=\`	$\left[\left[2-\frac{4\sqrt{10}}{5}, 1-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right], \left[2+\frac{4\sqrt{10}}{5}, \frac{(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\sqrt{5}}{5}\right]\right]$
$[A1, A2]$	\`=\`	$\left[\left[\frac{2(\sqrt{5}-2)\sqrt{5}}{5}, \frac{(\sqrt{5}-2)\sqrt{5}}{5}\right], \left[\frac{2(\sqrt{5}+2)\sqrt{5}}{5}, \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt{5}}{5}\right]\right]$
Асимптоталар:	\`=\`	$\left[\frac{x\sqrt{5}}{5}+\frac{3y\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=0, -\frac{3x\sqrt{5}}{5}+\frac{y\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=0\right]$

7-сүрөт.



8-сүрөт.

Корутунду. Жыйынтыктап кетсек, бул эмгекте өзгөртүп түзүү жана инварианттар методдорун колдонуп экинчи тартиптеги борбордук ийри сызыктарды классификациялоочу, алардын графикалык иллюстрациясын, каноникалык теңдемелерин жана координата системасын өзгөртүп түзүү формулаларын чыгарган программалар түзүлдү. Бул программалар Maple компьютердик математика системасы окуу процессин оптималдаштыруу үчүн уникалдуу мүмкүнчүлүктөрдү түзөөрүн көрсөтөт. Математиканын бөлүмдөрүн үйрөнүүдө ар кандай маселелердин визуалдаштыруусу студенттердин, окуучулардын материалды түшүнүүсүн жана жаңы билим алууга умтулуусун арттырат.

Адабияттар:

1. Тагаева Д.А., Талипов А.Т. Орто мектепте геометрия сабактарын маалыматтык технологияларды пайдаланып окутуу // Известия Кыргызской академии образования. – Бишкек, 2021. – №3 (55), – С. 24-31.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлиб, 2004. – С. 169-183.
3. Асанов А., Рафатов Р. Аналитикалык геометрия. – Бишкек, 2003. – С. 41-87.
4. Ахметова Ф.Х., Акимова И.Я., Чигирева О.Ю. Методика уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду с применением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016.
5. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. – Казань: Казанский университет, 2013. – С. 71-124.
6. Нигмедзянова А.М. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ 2015. – Вып. 16. – С. 30-32.
7. Дьяконов В.П. Maple 9.5 / 10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – С. 566-570.

Рецензиялаган:
Син Е.Е.,
педагогика илимдеринин доктору, профессор